

## بنام خدا

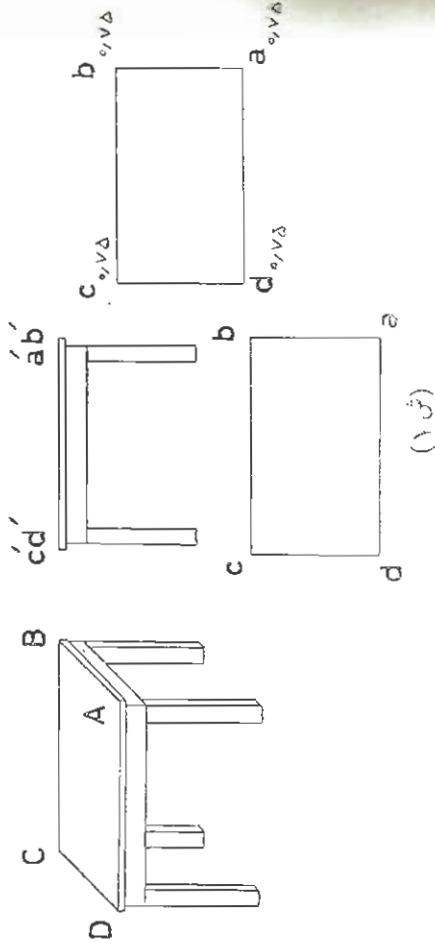
## بخش اول

هندسه دره ر قومی

## فصل اول

### مقدمات

۱- انواع تصویر - در شکل ۱، سه تصویر از یک میز می بینید.



تصویر سمت چپ که نقاشی میز است، میز را بخوبی مجسم می سازد. تصویر وسط شبیه به تصاویری است که ترسیم آن را در رسم یاد گرفته اید و میز یا هر چیز دیگر را با دو تصویر افقی و قائم، یا با عدد بیشتری تصاویر (افقی، قائم، نیمرخ و غیره) نمایش می دهد. تصویر سمت راست نوع خاصی تصویر است که موضوع بحث ما خواهد بود و معروف به تصویر ر قومی است.

همه این تصاویر، مانند رسم فنی، بر طبق قواعد مخصوص رسم

## عنوان

## صفحه

۱۹۵	۲- اوضاع مختلف خط و صفحه	۸
۱۹۸	فصل مشترك خط و صفحه	۲۸
۲۰۷	۳- خطوط و صفحات عمود بر هم	۴۲
۲۱۴	۴- عمود مشترك دو خط	۶۷
۲۲۲	مسائل ر قومی امتحانات نهایی	۱۳۵
۲۴۷	مسائل ترسیمی امتحانات نهایی	۲۴۰

لطفاً این غلطهای چاپی را تصحیح فرمایید:

صحیح	غلط	سطر	صفحه
$\delta$	d	۱۳	۸
$\Delta_1$	$\Delta$	سمت راست شکل ۱۶	۲۸
مانند O،	مانند،	۳	۴۲
$m_0$	$M_0$	۵	۶۷
$d'$	d	شکل ۷ بالای خط زردین	۱۳۵
$\alpha b_0 c_0$	$\alpha b_0 c$	۱۵	۲۴۰

آن نقطه نام دارد .

**۳- تصویر قائم** - هر گاه امتداد تصویر بر صفحه عمود باشد، تصویر را **قائم** و در غیر این صورت تصویر را **مایل** گویند .

چون عموماً تصاویر **قائم** شکلهای رسم می شود، از گفتن صفت **قائم** خودداری می کنیم و هر جا که صحبت از تصویر شود مراد تصویر قائم است . در شکل ۳ ، نقطه  $n$  تصویر «قائم»  $N$  است .

**۴- چگونه می توان از روی تصویر نقطه، خود نقطه را تعیین کرد** - تصاویر اشیا باید بقسمی رسم شوند که از روی آنها بتوان خوداشیا و اجزای مختلف آنها را تعیین کرد؛ زیرا که تصویر، وسیله تشخیص و مجسم کردن شیء است .

برای هر نقطه می توان روی صفحه تصویر، تصویری بدست آورد و آن پای عمودی است که از آن نقطه، بر صفحه تصویر فرود آید.

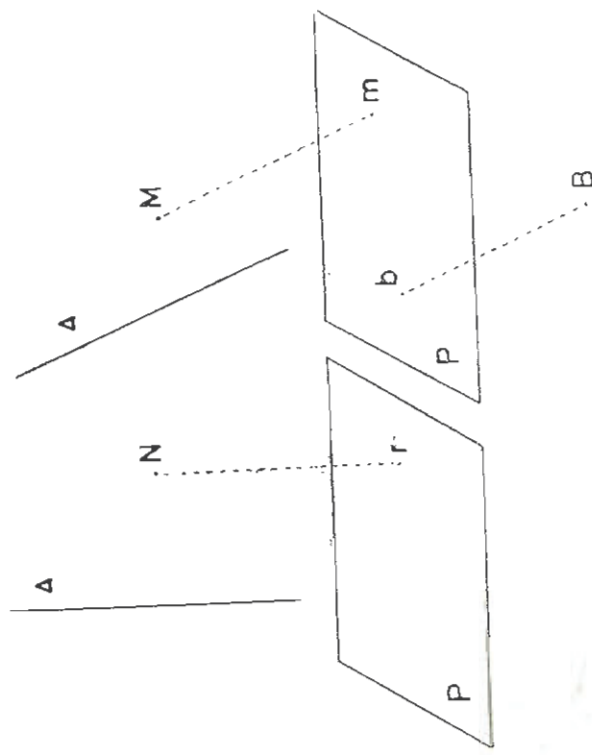
اما فقط با معلوم بودن تصویر یک نقطه نمی توان آن نقطه را تعیین کرد . مثلاً در شکل ۴ ، فقط تصویر نقطه  $A$  نیست بلکه تصویر همه نقاطی است که بر روی  $Aa$  واقع باشند .

برای اینکه از تصویر نقطه  $A$  بتوانیم به وضع خود نقطه  $A$  پی ببریم باید علاوه بر تصویر، عامل دیگری هم داشته باشیم؛ این عامل یا فاصله نقطه  $A$  از صفحه تصویر است یا تصویر دیگری از نقطه  $A$  بر روی یک صفحه دیگر است . مثلاً اگر گفته شود که « $b$  تصویر نقطه ای است که به فاصله  $۳$  بالایی صفحه تصویر واقع است» می توان آن نقطه را به این طریق تعیین کرد : از  $b$  عمودی بر صفحه تصویر اخراج کرده (شکل ۴ - ۱) روی آن از مبدا  $b$  به طرف بالایی صفحه تصویر طولی مساوی  $۳$  جدامی کنیم

می شوند ، صفحه ای که تصویر بر روی آن رسم می شود **صفحه تصویر** نام دارد . تصاویر نقاشی اشیا بر طبق قواعد **تصویر مرکزی** رسم می شوند؛ ما از این نوع تصویر صحبت نخواهیم کرد و به بحث در باره **تصویر قائم** خواهیم پرداخت .

**۲- تصویر بر یک صفحه** - هر گاه صفحه ای مانند  $P$  به نام **صفحه تصویر**، و خطی مانند  $\Delta$  به نام **امتداد تصویر** داده شود، تصویر هر نقطه بر روی صفحه  $P$  محل تلاقی این صفحه با خطی است که از آن نقطه به موازات امتداد تصویر رسم شود. در شکل ۲ ، صفحه تصویر،  $\Delta$  امتداد تصویر،  $m$  تصویر نقطه  $M$  و  $b$  تصویر نقطه  $B$  است . تصویر هر نقطه ای که در صفحه تصویر باشد بر خودش قرار دارد .

خطی که از هر نقطه به موازات امتداد تصویر کشیده شود **خط مصور**



(ش ۳)

(ش ۲)

مجموعه تصاویر نقاط آن شکل حاصل شود .

**۷- تصویر خط راست - قضیه ۴ - تصویر خط راست خطی**

راست است .

برهان - فرض می کنیم

که  $a$  تصویر نقطه‌ای مانند

$A$  از خط  $\Delta$  باشد (شکل ۵).

صفحه‌ای که بر  $\Delta$  و محور

نقطه  $A$  می‌گذرد بر صفحه  $P$

عمود است و با آن فصل

مشترکی مانند  $\delta$  دارد .

اکنون ثابت می کنیم که  $\delta$

تصویر  $\Delta$  است؛ برای این کار باید ثابت کنیم که تصویر هر نقطه از  $\Delta$  بر روی

$\delta$  است .

هرگاه  $M$  نقطه غیر مشخصی از  $\Delta$  باشد، عمود  $Mm$  که از آن بر

صفحه  $P$  فرود آید در صفحه‌ای است که بر  $\Delta$  و  $Aa$  مرور می‌کند . پس

نقطه  $m$  یعنی فصل مشترک آن عمود با صفحه  $P$  روی  $\delta$  است .

صفحه‌ای که بر خط  $\Delta$  مرور کند و عمود بر صفحه  $P$  باشد صفحه  $\delta$  تصور

خط  $\Delta$  نام دارد .

**۸- تصویر هر خط که بر صفحه تصویر عمود باشد يك نقطه است .**

**۹- هر گاه خطی با صفحه تصویر موازی باشد، با تصویرش بر صفحه**

**۱- هر گاه خطی بر صفحه‌ای عمود باشد هر صفحه که بر آن خط مرور کند**

بر آن صفحه عمود است .

**۲- فصل مشترک دو صفحه خطی است مستقیم .**

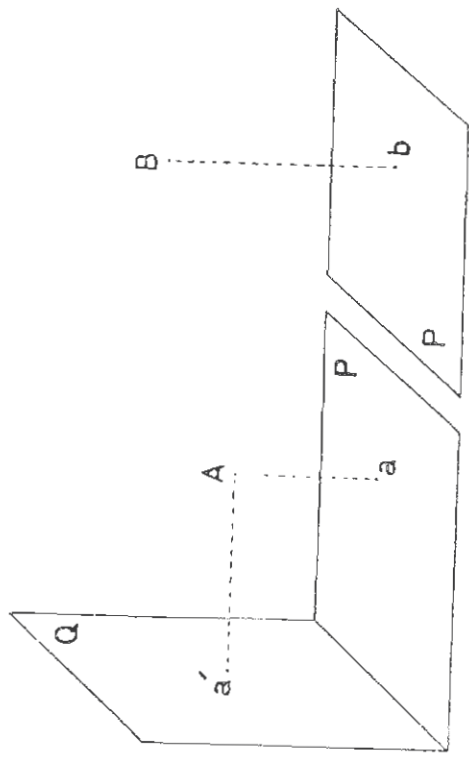
و به نقطه مطلوب  $B$  می‌رسیم. یا اگر در شکل ۴-ب،  $a$  تصویر نقطه‌ای

بر صفحه  $P$  و  $a'$  تصویر همان نقطه بر صفحه  $Q$  باشد و بخواهیم آن نقطه را

تعیین کنیم، باید از  $a$  عمودی بر  $P$  و از  $a'$  عمودی بر  $Q$  اخراج کنیم تا

یکدیگر را در  $A$  قطع کنند. تنها نقطه‌ای است که دو تصویرش  $a$

و  $a'$  هستند .



ب (ش ۴)

پس برای تعیین هر نقطه باید تصویر آن و فاصله‌اش از صفحه تصویر

یا تناوبش بر دو صفحه، داده شده باشند. نوع اول را تصویر به روش

هندسه رقومی و نوع دوم را تصویر به روش هندسه ترسیه می‌گویند.

**۵- هندسه رقومی و هندسه ترسیه - قسمتی از هندسه که در**

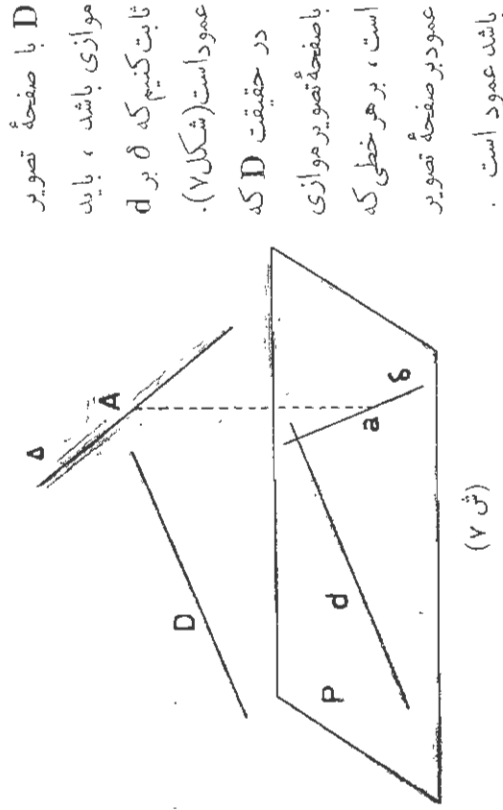
آن، هر نقطه به وسیله تصویرش توأم با فاصله‌اش از صفحه تصویر مشخص

می‌شود هندسه رقومی و قسمتی از هندسه که در آن، هر نقطه به وسیله

دو تصویرش بر دو صفحه مشخص می‌شود هندسه ترسیه نام دارد .

**۶- تصویر يك شكل - تصویر يك شكل، شکلی است که از**

برهان - هرگاه  $\Delta$  بر  $D$  عمود باشد و  $\theta$  تصویر  $d$  و  $D$  و



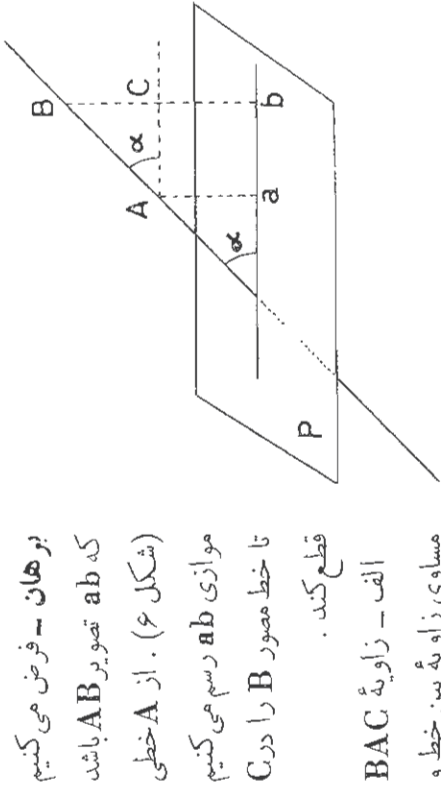
با صفحه تصویر  $D$  موازی باشد ، باید ثابت کنیم که  $\theta$  بر  $d$  عمود است (شکل ۷). در حقیقت  $D$  که با صفحه تصویر موازی است ، بر هر خطی که عمود بر صفحه تصویر باشد عمود است . بنابراین اگر  $Aa$  خط مصوریکی از نقاط  $\Delta$  باشد ،  $D$  بر آن عمود است . چون  $D$  بر دو خط  $Aa$  و  $\Delta$  عمود است ،  $D$  بر تمام خطوط آن صفحه و از جمله بر  $\theta$  نیز عمود است ؛ و چون  $d$  و  $D$  متوازیند ،  $d$  بر  $\theta$  عمود بوده و زاویه بین  $\theta$  و  $d$  قائمه است .

۱۳ - قضیه - اگر تصویرهای دو خط عمود بر هم یکدیگر عمود باشند، لاقط یکی از آن دو خط با صفحه تصویر موازی است .

برهان - فرض می کنیم که  $\Delta$  بر  $D$  و  $d$  عمود باشد و یکی از دو خط مثلا  $\Delta$  ، با صفحه  $P$  ، یعنی با تصویرش  $\theta$  ، موازی نباشد . ثابت می کنیم که خط دیگر ، یعنی  $D$  ، با صفحه  $P$  موازی است (شکل ۸). اگر  $Aa$  مصور یکی از نقاط  $D$  باشد ، بر  $\theta$  عمود است ، و  $\theta$  که عمود است بر  $d$  و بر  $\Delta$  بر صفحه مصور  $D$  عمود می شود . پس  $D$  بر  $\theta$

موازی است .<sup>۱</sup>

۱۰ - قضیه - طول تصویر هر قطعه خط مساوی است با حاصل ضرب طول آن قطعه خط در کسینوس زاویه بین خط و تصویر .



(ش ۶)

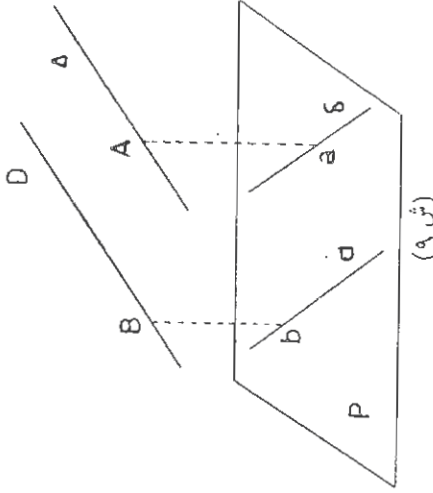
$$(\widehat{BAC} = \alpha)$$

الف - زاویه  $BAC$  مساوی زاویه بین خط و تصویر آن است .  
ب - در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  می توان نوشت :  
 $AC = AB \cos \alpha$  و چون به جای  $AC$  مساویش  $ab$  را قرار دهیم خواهیم داشت :  $ab = AB \cos \alpha$  .

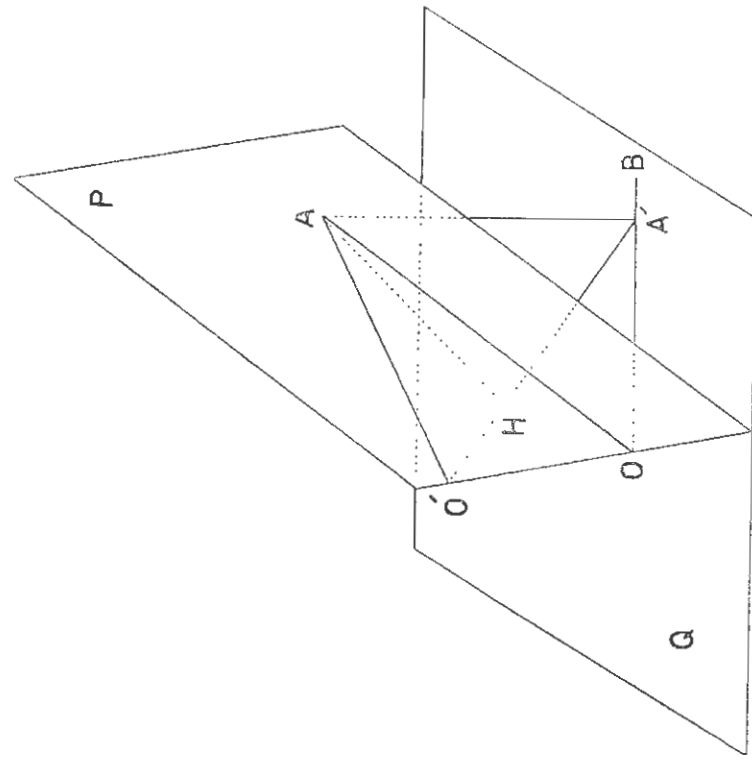
۱۱ - قضیه - هرگاه یکی از دو خط عمود بر هم با صفحه تصویر موازی بوده و دیگری بر صفحه تصویر عمود نباشد ، تصاویر آن دو خط بر یکدیگر عمودند .

۱ - هرگاه خط  $\Delta$  با صفحه  $P$  موازی باشد هر صفحه که بر خط  $\Delta$  بگذرد و با صفحه  $P$  موازی نباشد صفحه  $P$  را بر فصل مشترکی موازی با  $\Delta$  قطع می کند .

**۱۵ - عکس این قضیه**  
 صحیح نیست، یعنی متوازی بودن تصاویر بر دوخط، دلیل متوازی بودن آنها نیست.  
**۱۶ - تعریف - مسطحه**  
 فرجه بین دو صفحه، زاویه ای است که رأسش روی فصل مشترک دو صفحه باشد و هر ضلعش در یکی از دو صفحه واقع بوده و بر فصل مشترک دو صفحه عمود باشد (شکل ۱۰،  $\widehat{AOB}$ ).

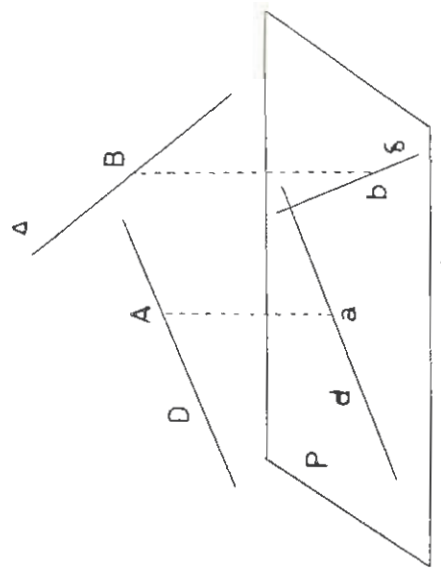


(ش ۹)



(ش ۱۰)

عمود است.  
 خط  $D$  که عمود است بر دوخط غیر-موازی  $\Delta$  و  $\delta$  از صفحه مصور  $\Delta$ ، بر این صفحه عمود است و در نتیجه با صفحه تصویر موازی است. (ش ۸)



**۱۳ - قضیه -** اگر تصویرهای دو خط بر هم عمود باشند و یکی از آن دوخط با صفحه تصویر موازی باشد، دو خط بر یکدیگر عمودند.  
**برهان -** در شکل ۸، اگر فرض کنیم که  $D$  با  $d$  موازی و  $d$  بر  $\delta$  عمود باشد، ثابت می کنیم که  $D$  بر  $\Delta$  عمود است.  
 چون  $D$  با  $d$  موازی است، عمود است هم بر  $\delta$  (که بر  $d$  عمود است) و هم بر مصور  $Bb$  (که بر صفحه تصویر عمود است)؛ پس  $D$  بر صفحه مصور خط  $\Delta$  عمود می شود، یعنی بر همه خطوط آن از جمله بر  $\Delta$  عمود است.  
**۱۴ - قضیه -** تصویرهای خطوط متوازی با یکدیگر موازیند.  
**برهان -** فرض می کنیم که  $\Delta$  با  $D$  موازی باشد (شکل ۹).  
 چون دو مصور  $Aa$  و  $Bb$  نیز با هم موازیند، صفحات مصور  $\Delta$  و  $D$  با هم موازی هستند و فصل مشترک آنها  $P$  (یعنی  $\delta$  و  $d$  تصاویر دو خط)، متوازیند.  
 خط و صفحه عمود بر یک صفحه با یکدیگر موازیند.

است از صفحه P که بر فصل مشترک دو صفحه عمود باشد .

۱۹- مقیاس - تصاویر اشیا را عموماً نمی توان به اندازه واقعی رسم کرد و باید آنها را به يك نسبت كوچك كرده شكلي مشابه با تصوير حقيقي رسم كرد ؛ نسبت تشابه شكل مرسوم و تصوير حقيقي را مقیاس عددی می نامند و آن را به صورت  $\frac{1}{k}$  نمایش می دهند (k عدد صحیح).

مثلاً اگر طولی از تصویر حقيقي شكلي برابر يك متر باشد و آن طول در تصویر مرسوم به ۱ سانتیمتر نموده شود ، مقیاس  $\frac{1}{100}$  و اگر به ۲ سانتیمتر نموده شود ، مقیاس  $\frac{1}{50}$  یا  $\frac{2}{100}$  است .

مقیاس عددی تصویر به دو چیز بستگی دارد : یکی صفحهای که باید تصویر را روی آن رسم کنیم و دیگری شكلي که باید تصویرش را رسم کنیم كوچكتر باشد ، مقیاس كوچكتر خواهد بود .

مثلاً تصویر يك ميز را می توان به مقیاس  $\frac{1}{10}$  روی يك صفحه كاغذ معمولی كشید اما تصویر يك خانه را باید لافل به مقیاس  $\frac{1}{100}$  و تصویر يك شهر را به مقیاس  $\frac{1}{1000}$  یا  $\frac{1}{10000}$  و نقشه يك كشور را مثلاً با مقیاس  $\frac{1}{1000000}$  رسم كرد .

غالباً به جای مقیاس عددی ، مقیاس خطی (شكل ۱۱) بكار می برند . مقیاس خطی عبارت از دو خط متوازی نزدیک به هم (گاهی يك خط) است که در گوشه نقشه یا شكل می كشند و قطعات متوالی



(ش ۱۱)

هر ضلع مسطحه فرجه دو صفحه را می توان تصویر ضلع دیگر بر روی صفحه آن ضلع دانست .

۱۷- قضیه - زاویه مسطحه دو صفحه ، بزرگترین زاویه ای است که بین خطوط یکی از آن دو صفحه و تصویرشان بر صفحه دیگر تشکیل می شود .

برهان - در یکی از دو صفحه ، از A خط AO را بر فصل مشترك دو صفحه عمود رسم کرده و خط دیگری نیز مانند AO رسم می کنیم و تصویرش را روی صفحه دیگر A'O' می نامیم (شكل ۱۰) . چون A'O' بر فصل مشترك عمود و A'O' نسبت به فصل مشترك مایل است ،  $A'O' > A'O$  . اگر طول A'H را مساوی A'O' بر A'O' نقل کنیم ، H بین A' و O' واقع می شود و در مثل AHO زاویه خارجی H بزرگتر از زاویه داخلی O' است :  $\widehat{AHA} > \widehat{AO'A}$  چون دو مثلک AOA' و AHA' برابرند ،  $\widehat{AHA} = \widehat{AO'A}$  و در نتیجه :  $\widehat{AO'A} > \widehat{AO'A}$  .

۱۸- شیب خط - تاثرات زاویه حاده ای که خط با تصویر خود بر روی صفحهای می سازد ، شیب خط نسبت به آن صفحه نام دارد .

در دو صفحه متقاطع ، خطی که در یکی از آنها عمود بر فصل مشترك رسم شود ، شیبش از شیب خطوط دیگر صفحه بزرگتر است و به این جهت آن را خط بزرگترین شیب صفحه اول نسبت به صفحه دوم می نامند .

یعنی : خط بزرگترین شیب صفحه P نسبت به صفحه Q خطی

مساوی واحد طول که به مقیاس تحویل شده باشد بر روی آن جدا می کنند؛ مثلاً اگر واحد طول متر باشد ، در مقیاس  $\frac{1}{100}$  ، که یک سانتیمتر نمایش یک متر است ، بر مقیاس خطی قطعات یک سانتیمتری ، و در مقیاس  $\frac{1}{50}$  قطعات ۲ سانتیمتری ، جدا کرده و از چپ به راست با اعداد ۱، ۲، ۳، ... شماره گذاری می کنند .

غالباً اولین قطعه طرف چپ مقیاس خطی را به ۱۰ جزء مساوی تقسیم می کنند که هر جزء نماینده  $\frac{1}{10}$  واحد طول تحویل شده است ؛ این تقسیمات جزء را از راست به چپ شماره می گذارند و این قسمت را پاشنه مقیاس می نامند . از پاشنه مقیاس برای تعیین طولهای کوچکتر از ۱ استفاده می شود .

برای تعیین فاصله حقیقی دو نقطه که تصاویر آنها  $a$  و  $b$  باشند ، دهانه پرگار را به اندازه  $ab$  باز می کنیم و آن را روی مقیاس می گذاریم و فاصله را می خوانیم .

در هندسه رقومی همیشه با واحد سروکار داریم . مقصود از واحد همه جا واحدی است که برای اندازه گیری ابعاد شکل اختیار کرده و به مقیاس تحویل نموده ایم .

اگر برای واحد ، سانتیمتر یا طول مشخص دیگری اختیار نشود ممکن است پاره خطی را به منزله واحد اختیار کنید و در کنار شکل آن را نمایش دهید .

**خلاصه مطالب مهم :**

۱- تصویر غالباً وسیله خوبی برای بیان مقصود است .

۲- تصویر را به دو نوع می توان تقسیم کرد :

**الف -** تصویری که طبق قواعد نقاشی کشیده می شود و اشیا را بطوری که با چشم دیده می شوند مجسم می سازد .

**ب -** تصویری که با قواعد هندسه رقومی و هندسه ترسیمی رسم می شود و اشیا را بطوری که هستند مشخص می سازد .

۳- تصویر نقطه بر صفحه ، پای عمودی است که از نقطه بر صفحه فرود آید .

۴- تصویر نقطه بنهایی برای مشخص کردن نقطه کافی نیست . در هندسه رقومی ، علاوه بر تصویر ، رقوم نقطه نیز داده می شود .

۵- تصویر خط مستقیم خطی است مستقیم .

۶- هر گاه یکی از دو خط عمود بر هم با صفحه تصویر موازی و دیگری بر صفحه تصویر عمود نباشد تصویرهای آن دو خط بر هم عمود خواهند بود .

۷- اگر تصاویر دو خط بر هم عمود باشند و لااقل یکی از آن دو خط با صفحه تصویر موازی باشد ، دو خط بر یکدیگر عمودند .

۸- طول تصویر یک پاره خط مساوی است با طول آن پاره خط ضرب در کسینوس زاویه بین خط و تصویرش .

۹- تصاویرهای خطوط متوازی باهم موازیند .

۱۰- خط بزرگترین شیب صفحه  $P$  نسبت به صفحه  $Q$  خطی است که در صفحه  $P$  بر فصل مشترک دو صفحه عمود رسم شود .